Ciągi liczbowe – pojęcie i własności ciągów

Pojęcie ciągu liczbowego. Przykłady ciągów

Definicja 1. *Ciągiem liczbowym nieskończonym* (krótko: *ciągiem*) nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych (ewentualnie nieskończony jego podzbiór) w zbiór liczb rzeczywistych:

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej *n,* nazywamy *n-tym wyrazem ciągu* (lub *wyrazem ogólnym ciągu*) i zamiast zapisywać $f(n)$, oznaczamy go przez a_n. Ciąg o wyrazach a_n będziemy oznaczać symbolem (a_n).

Ciągi można przedstawiać na płaszczyźnie, jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n).

Uwaga. Jeżeli w powyższej definicji zamiast zbioru $\mathbb{N}$ rozpatrywać będziemy jakiś skończony jego podzbiór, to wówczas będziemy mieli do czynienia z *ciągiem skończonym*.

Przykład. 1. Wyznaczyć pięć początkowych wyrazów ciągu, a następnie zaznaczyć je na płaszczyźnie:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, b) $b_n = 5 - 2n$.

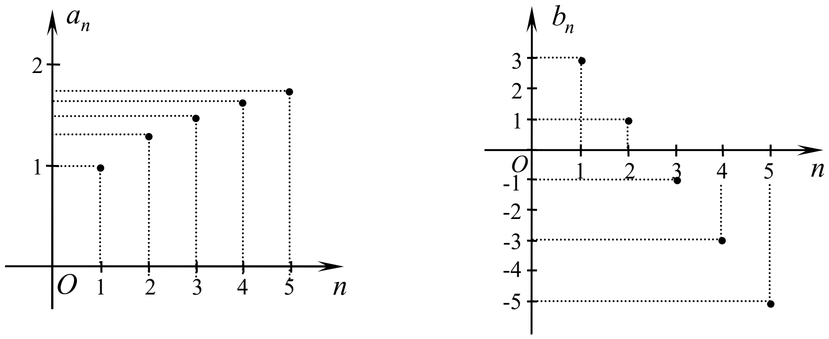
Rozwiązanie.

a) Podstawiając w miejsce *n* we wzorze $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ pięć początkowych liczb naturalnych otrzymamy:

$a_1 = \dfrac{2\cdot 1}{1+1} = 1$, $a_2 = \dfrac{2\cdot 2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$, $a_3 = \dfrac{2\cdot 3}{3+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, $a_4 = \dfrac{2\cdot 4}{4+1} = \dfrac{8}{5}$, $a_5 = \dfrac{2\cdot 5}{5+1} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

b) Dla ciągu o wyrazie ogólnym $b_n = 5 - 2n$ mamy:

$b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = -3$, $b_5 = -5$.



Rys. 1. Ilustracja do przykładu 1

Ważnymi rodzajami ciągów są ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Definicja 2. *Ciągiem arytmetycznym* o różnicy r nazywamy taki ciąg (a_n), w którym

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} = a_n + r\,.$$

Definicja 3. *Ciągiem geometrycznym* o ilorazie q nazywamy taki ciąg (a_n), w którym

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} = a_n\, q\,.$$

Przypomnijmy jeszcze wzór na n-ty wyraz a_n oraz sumę n początkowych wyrazów S_n ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

Ciąg arytmetyczny:

$$a_n = a_1 + (n-1)r\,,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n\,,$$

Ciąg geometryczny:

$$a_n = a_1 q^{n-1}\,,$$

$$S_n = \begin{cases} na_1\,, & \text{gdy } q = 1 \\ a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q = 1 \end{cases}.$$

Własności ciągów

Definicja 4. Ciąg (a_n) jest:

- *rosnący* $\Leftrightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} > a_n \quad (\text{lub } a_{n-1} - a_n > 0)$,
- *malejący* $\Leftrightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} < a_n \quad (\text{lub } a_{n-1} - a_n < 0)$,
- *niemalejący* $\Leftrightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \ge a_n \quad (\text{lub } a_{n-1} - a_n \ge 0)$,
- *nierosnący* $\Leftrightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} \le a_n \quad (\text{lub } a_{n-1} - a_n \le 0)$,
- *stały* $\Leftrightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{n+1} = a_n \quad (\text{lub } a_{n-1} - a_n = 0)$.

Ciągi rosnące, malejące, niemalejące, nierosnące nazywamy *ciągami monotonicznymi*.

Przykład 2. Zbadać monotoniczność ciągów:

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$, b) $b_n = 5 - 2n$.

Rozwiązanie.

a) Badamy znak różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

Jak widać $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem badany ciąg jest rosnący.

b) Postępujemy, jak wyżej

$b_{n+1} - b_n = [5 - 2(n+1)] - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2 < 0$.

Badany ciąg jest więc malejący.

Definicja 4. Ciąg (a_n) jest:

- *ograniczony z dołu* $\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \geq m$,
- *ograniczony z góry* $\Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \leq M$,
- *ograniczony* $\Leftrightarrow \exists_{m,M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ m \leq a_n \leq M$.

Przykład 3. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+1}$ jest ograniczony.

Rozwiązanie. Z przykładu 2 wiemy, że badany ciąg jest rosnący, co oznacza, że jego pierwszy wyraz $a_1 = 1$ jest wyrazem najmniejszym i można tę wartość przyjąć, jako dolne ograniczenie wyrazów tego ciągu:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n \geq 1,$$

zatem ciąg jest ograniczony z dołu.

Aby stwierdzić, że ciąg (a_n) jest również ograniczony z góry przekształćmy jego wyraz ogólny:

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Widzimy zatem, że żaden wyraz nie przekroczy wartości 2 (ponieważ od 2 odejmujemy dla każdego n pewną wartość dodatnią). Czyli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < 2\,,$$

a zatem badany ciąg jest również ograniczony z góry.
Ostatecznie stwierdzamy, że ponieważ ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu i z góry, to jest ogólnie ograniczony.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać monotoniczność ciągu:

1. $a_n = 3 - \frac{1}{2}n$, **2.** $a_n = 2n^2 + 1$, **3.** $a_n = \frac{1-3n}{n+1}$,

4. $a_n = 3^n$, **5.** $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, **6.** $a_n = \frac{n}{2^n}$,

7. $a_n = \ln\frac{n+2}{n+1}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch